群の直積とその表現について (有限群の群環と表現論)

光, 道隆

数理解析研究所講究録
111巻 1971年 47-56

群の直積とその表現について

東京教育大 大学院 光 道隆

§0. 序

例えば次の様な問題を考えよう。"π を finite abelian group, Q を有理数体, Z を有理整数環, ϑ を $Z\pi$ を含む $Q\pi$ の maximal order とする。その時, $Pic(Z\pi) \xrightarrow{\varphi} Pic(\vartheta)$ の $Ker\,\varphi$ はどのように捕らえられるか?" この問題に関して R.G. Swan, 宮田武彦氏により次の結果がえられている。π の subgroup π' に対し $Z\pi \otimes_{Z\pi'} Z$ という型の $Z\pi$-module の有限個の direct sum を permutation π-module, π-permutation module $\exists S$, $\exists S'$, $0 \longrightarrow M \longrightarrow S \longrightarrow S' \longrightarrow 0$ (exact) と書ける $Z\pi$-module M を quasi-permutation $Z\pi$-module とよぶ時, π がもし cyclic group ならば, $Ker\,\varphi = g\text{-}Pic(Z\pi)$ $=\{[I] \mid I$; quasi-permutation $Z\pi$-projective ideal$\}$ である。ところで, π が abelian group の時 $g\text{-}Pic(Z\pi) \subset Ker\,\varphi$ は Swan の方法により容易に証明できるが, その逆が言えるか

どうかが問題である．宮田氏のうまい方法により cyclic の時は分っているのだから，abelian group の時の問題が cyclic の時に帰着できればと望むのは自然であろう．その様な事からも，群の直積と表現との関係はどうなっているのか興味がある。今日述べるのは，その関係を調べるほんの半歩で，$\mathbb{Z}$ 上の表現との関係よりずっと以前の問題についてである。つまり，π を finite group，K を field，$G_0(K\pi)$ を Grothendieck ring としたとき，$\varphi: G_0(K\pi_1)\otimes G_0(K\pi_2) \longrightarrow G_0(K[\pi_1\times\pi_2])$，$\varphi([M_1]\otimes[M_2]) = [M_1 \# M_2]$，の Kernel, Cokernel を考えるのである。もちろん $M_1 \# M_2$ は M_1, M_2 の outer tensor product である。

§1.

まず，Fein[2]にしたがって，φ を Schur index を用いて捕らえよう。

E を K 上 finite な normal separable extension で π の splitting field になっているものとする。$\mathcal{G}(E/K)$ を K 上 E の Galois group，一般に $E\pi$-module N，$\sigma\in\mathcal{G}(E/K)$ に対し，σN を自然に定義し，N の character を χ としたとき，σN の character を $\sigma\chi$ と書く．$m_K(N)$ で N の K 上の Schur index を表わし，$\pi=\pi_1\times\pi_2$ と置き，M_i を irreducible $K\pi_i$-module，N_i を M_i^E の irreducible $E\pi_i$-component，ψ_i を N_i

の character, $\mathcal{H}_i = \mathcal{G}(E/K(\psi_i))$ と書く。

次の事実は Fein [2] にのっている。

(1) $\sigma, \tau \in \mathcal{G}(E/K)$ とすると $\sigma N_1 \# \tau N_2$ も irreducible module で, $m_K(N_1 \# N_2) = m_K(\sigma N_1 \# \tau N_2)$ である。

(2) $M_1 \# M_2$ も完全可約で, $M_1 \# M_2 \cong k(T_1 \oplus \cdots \oplus T_r)$, ここで $\{T_i\}$ は nonisomorphic irreducible $K\pi$-module で, k は $m_K(N_1)m_K(N_2)/m_K(N_1 \# N_2)$ に等しい。さらに T_i はそれぞれ同じ K-dimension $m_K(N_1 \# N_2)(K(\psi_1, \psi_2):K)(N_1 \# N_2 ; E)$ をもっている。

(3) $M_1 \# M_2$ が irreducible module であるための必要十分条件は次の3条件である。

(a) $m_K(N_1)\, m_K(N_2) = m_K(N_1 \# N_2)$.

(b) $\mathcal{G}(E/K) = \mathcal{H}_1 \mathcal{H}_2$.

(c) $(K(\psi_1):K)(K(\psi_2):K) = (K(\psi_1, \psi_2):K)$.

(4) $\pi_1 = \pi_2$ のとき, irreducible $K\pi_1$-module M_1 について次は同値である。

(a) M_1 は absolutely irreducible $K\pi_1$-module である。

(b) $M_1 \# M_1$ は irreducible $K\pi$-module である。

さて, (2) より φ は Schur index を用いて一応きまっている。(4) は $\pi_1 = \pi_2$ の時は φ が同型になるための必要十分条件は K が π_1 の splitting field であることを主張している。つまり,

問題はSchur indexに帰着されるのであるが，現在のSchur indexの計算法ではglobalなあつかいは無理である。以下では違った角度から調べてみる。最後に(3)からの簡単な系を書いておこう。

(5) group π の order を $|\pi|$ と書く。

$$(|\pi_1|,|\pi_2|)=1 \Longrightarrow G_0(Q\pi_1)\otimes G_0(Q\pi_2)\xrightarrow{\varphi} G_0(Q[\pi_1\times\pi_2])$$

以下一つの目的はこの逆にあたる事を調べる事にある。

§2 道具をそろえる

以下 char. $K=0$ のときあつかう。

(1).

Lemma 1. π_i が abelian group ならば，$\mathrm{Ker}\,\varphi=0$ で $\mathrm{Coker}\,\varphi$ は torsion free である。

これは，π_i が abelian group の時 Schur index が 1 である事に注意すれば §1 の (2) より φ が split map になることより分る。

さて，π' を π の subgroup とする時 $G_0(K\pi)\underset{j^*}{\overset{j_*}{\rightleftarrows}}G_0(K\pi')$ を functor $\mathrm{mod}\,K\pi \underset{\cdot\otimes_{K\pi'}K\pi}{\overset{res.}{\rightleftarrows}} \mathrm{mod}\,K\pi'$ よりみちびかれる ring homomorphism とする。$\pi_i\supset\pi_i'$ の時

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Ker}\,\varphi & \longrightarrow & G_0(K\pi_1)\otimes G_0(K\pi_2) & \xrightarrow{\varphi} & G_0(K[\pi_1\times\pi_2]) & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\,\varphi \\
\upharpoonleft\downharpoonright & \circlearrowright & \upharpoonleft\downharpoonright & \circlearrowright & \upharpoonleft\downharpoonright & \circlearrowright & \upharpoonleft\downharpoonright \\
\mathrm{Ker}\,\psi & \longrightarrow & G_0(K\pi_1')\otimes G_0(K\pi_2') & \xrightarrow{\psi} & G_0(K[\pi_1'\times\pi_2']) & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\,\psi
\end{array}$$

であり，一般にφを調べるのに induction theorem は使用可能である。例えば，Artin の induction theorem を用いれば，次の結果が得られる。

Proposition 2. π_iを finite group とすると$\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$である。

この Proposition は induction を用いなくても直接証明できる。

(2). Normal subgroup からの情報

$1 \longrightarrow \pi_i' \xrightarrow{j} \pi_i \xrightarrow{p} \pi_i'' \longrightarrow 1$ (exact) $\pi_i' \triangleleft \pi_i$とする。今，又，

$G_0(K\pi_i) \underset{p_*}{\overset{p^*}{\rightleftarrows}} G_0(K\pi_i'')$を mod-$K\pi_i \underset{res}{\overset{\cdot \otimes_{K\pi_i} K\pi_i''}{\rightleftarrows}}$ mod-$K\pi_i''$よりみちびかれる ring homomorphism とする。

$$\begin{array}{ccccc}
G_0(K\pi_1'') \otimes G_0(K\pi_2'') & \xrightarrow{\varphi_1} & G_0(K[\pi_1'' \times \pi_2'']) & \xrightarrow{\varphi_1'} & \mathrm{Coker}\,\varphi_1 \\
p^* \uparrow\downarrow p_* & \circlearrowleft & p^* \uparrow\downarrow p_* & \circlearrowright & p^* \uparrow\downarrow p_* \\
G_0(K\pi_1) \otimes G_0(K\pi_2) & \xrightarrow{\varphi_2} & G_0(K[\pi_1 \times \pi_2]) & \xrightarrow{\varphi_2'} & \mathrm{Coker}\,\varphi_2 \\
j^* \uparrow\downarrow j_* & \circlearrowleft & j^* \uparrow\downarrow j_* & \circlearrowright & j^* \uparrow\downarrow j_* \\
G_0(K\pi_1') \otimes G_0(K\pi_2') & \xrightarrow{\varphi_3} & G_0(K[\pi_1' \times \pi_2']) & \xrightarrow{\varphi_3'} & \mathrm{Coker}\,\varphi_3
\end{array}$$

Mを$K[\pi_1' \times \pi_2']$の irreducible module とすると，

$M^E \cong m_K(N_1 \# N_2)(N_1 \# N_2 \oplus \gamma(N_1 \# N_2) \oplus \cdots\ )$と書ける。ただし，Eは§1の様にK上 finite normal separable な$\pi_1' \times \pi_2'$の splitting field，N_iは$E\pi_i'$-irreducible module，N_iの character をψ_iとすると，$\gamma \in \mathcal{G}(E/K) \big/ \mathcal{G}(E/K(\psi_1, \psi_2))$である。Normal subgroup からの情報として次の Lemma が

得られる。

Lemma 3 (a) irreducible $K[\pi_1' \times \pi_2']$-module M が存在して、$\varphi_3'([M]) \neq 0$ で、

$$\frac{m_K(N_1)\, m_K(N_2)\, (K(\psi_1):K)(K(\psi_2):K)}{m_K(N_1 \# N_2)\, (K(\psi_1, \psi_2):K)} \nmid m$$

ならば、$\mathrm{Coker}\, \varphi_2 \neq 0$ である。ただし、$m = |\pi_1'' \times \pi_2''|$ とする。

(b) $\varphi_3'([M]) \neq 0$, M の character を χ とするとき、χ の inertial group $I(\chi) = \{ g \mid g \in \pi_1 \times \pi_2,\ \chi^g = \chi \} = \pi_1 \times \pi_2$ をみたすような irreducible $K[\pi_1' \times \pi_2']$-module M が存在すると仮定し、さらに、$\mathrm{Coker}\, \varphi_3$ は torsion free だと仮定すると、$\mathrm{Coker}\, \varphi_2 \neq 0$ である。

(c) $K = \mathbb{Q}$ とし、π_1', π_2' をそれぞれ $\underbrace{(p, \cdots, p)}_{n}$, $\underbrace{(p, \cdots, p)}_{m}$ (p は odd prime) 型の abelian group, $Z_i = C_{\pi_i}(\pi_i')$ (centralizer) とし、π_i / Z_i を加群 π_i' の morphism の group と考え、自然な map $\pi_1/Z_1 \times \pi_2/Z_2 \xrightarrow{\psi} PGL(n+m, p)$ を考える。$\mathbb{Z}/(p)$ の原始根を r とする。

$$i_* j^* \mathrm{Coker}\, \varphi_3 = 0 \iff \psi(\pi_1/Z_1 \times \pi_2/Z_2) \ni {}^{\exists} \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad}^{n} \overbrace{\qquad\qquad}^{m} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & r & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r \end{pmatrix} \end{array} = \sigma.$$

σ の order は $p-1$ である。

(d) $\mathrm{Coker}\, \varphi_1 \neq 0$ ならば $\mathrm{Coker}\, \varphi_2 \neq 0$ である。

(3).

group π に対してその exponent を $e(\pi)$ と書くことにする。

Lemma 4．π_iを abelian group とし，G.C.D.$(e(\pi_1), e(\pi_2))$ $=\prod p^{h_p}$と素元分解でき，Kに含まれる1の原始p^s乗根のうちsの最大値をそれぞれs_pとする。もし，$h_p > s_p$なるpが存在すれば，$\varphi: G_0(K\pi_1)\otimes G_0(K\pi_2) \not\twoheadrightarrow G_0(K[\pi_1\times\pi_2])$。

§3．応用

§2でそろえた道具をエイヤッと振回してみると，次の事が出てくる。

(1)．abelian group の時．

$K=Q$，$\pi_1=(p^{n_1}, p^{n_2}, \cdots, p^{n_\ell})$型，$\pi_2=(p^{n_{\ell+1}}, \cdots, p^{n_{\ell+k}})$型の abelian group とすると，

Coker φ の rank

$$=\sum_{0\leq t_i\leq n_i}\left\{\varphi(p^{t_1})\times\cdots\times\varphi(p^{t_{\ell+k}})\times\left[\varphi\left(p^{\max_{1\leq i\leq \ell+k}(t_i)}\right)^{-1}-\varphi\left(p^{\max_{1\leq i\leq \ell}(t_i)}\right)^{-1}\varphi\left(p^{\max_{1\leq j\leq k}(t_{\ell+j})}\right)^{-1}\right]\right\}.$$

記号が繁雑になってしまったが，Σ内のφは Euler の函数を表わすものとする。

(2)．任意の group について．

group π の center を $Z(\pi)$ と書く．今．$\underset{\pi_1'\triangleleft\pi_1}{\text{L.C.M.}}(e(Z(\pi_1/\pi_1')))$ $=\prod p^{m_p}$，$\underset{\pi_2'\triangleleft\pi_2}{\text{L.C.M.}}(e(Z(\pi_2/\pi_2')))=\prod p^{n_p}$と素元分解していると仮定し，$s_p$をKに含まれる1の原始$p^s$乗根のうちで，$s$の最大値とする。$\exists p$ s.t. $\min(m_p, n_p) > s_p$

$$\Longrightarrow \quad G_0(K\pi_1)\otimes G_0(K\pi_2) \not\twoheadrightarrow G_0(K[\pi_1\times\pi_2]).$$

(3)　$\underset{\pi'\triangleleft\pi}{\text{L.C.M}}(e(Z(\pi/\pi')))=h$とすると，$\pi$の splitting field

は$Q(\sqrt[n]{1})$を含む。

(4). π_iをodd orderのgroupとし，$^{\exists}p \mid (|\pi_1|, |\pi_2|)$，$2 \mid (K(\zeta_p):K)$
pはodd prime，ζ_pは1の原始p乗根と仮定すると，

$G_0(K\pi_1) \otimes G_0(K\pi_2) \not\rightarrow G_0(K[\pi_1 \times \pi_2])$である。

Remark

特に$K = Q$とすれば，$2 \nmid |\pi_1||\pi_2|$ならば

$(|\pi_1|, |\pi_2|) = 1 \Longleftrightarrow G_0(Q\pi_1) \otimes G_0(Q\pi_2) \xrightarrow{\sim} G_0(Q[\pi_1 \times \pi_2])$.

(5) $|\pi| = \prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i}$と素元分解でき，任意の$i, j$について$p_i \nmid p_j - 1$と仮定すると$\pi$のsplitting fieldは$Q(\zeta_{p_1 \cdots p_m})$を含む。ただし，$\zeta_{p_1 \cdots p_m}$は1の原始$p_1 \cdots p_m$乗根である。

Solomonの結果とあわせれば，このようなtypeのgroupのsplitting fieldはきまったことになる。

Remark

Order $n = p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}$をfixしたとき，そのorderをもつすべてのgroupがnilpotent groupであるための必要十分条件は$p_j \nmid p_i^{n_i - t} - 1$，$n_i > {}^{\forall}t \geqq 0$であるから，(5)は有意味である。

(6). 2-groupの時は，index 2のcyclic subgroupをもつようなgroupについて考えてみる事が重要である。それは，任意の2-groupのcharacterがある意味でその様なgroupのcharacterによって表わされるからである。(Feit [3] P.73,

(14,3) 参照)。

ところで, index 2 の cyclic subgroup をもつ group は次の type しかない。

$|\pi| = 2^{n+1}$ とする。

I. $\pi = \langle s \mid s^{2^{n+1}} = 1 \rangle$.

II. $\pi = \langle s, t \mid s^{2^n} = 1,\ t^2 = 1,\ tst^{-1} = s \rangle$

III. $\pi = \langle s, t \mid s^{2^n} = 1,\ t^2 = s^{2^{n-1}},\ tst^{-1} = s^{-1} \rangle \quad n \geqq 2$.

IV. $\pi = \langle s, t \mid s^{2^n} = 1,\ t^2 = 1,\ tst^{-1} = s^{-1} \rangle \quad n \geqq 2$

V $\pi = \langle s, t \mid s^{2^n} = 1,\ t^2 = 1,\ tst^{-1} = s^{1+2^{n-1}} \rangle\ n \geqq 3$

VI $\pi = \langle s, t \mid s^{2^n} = 1,\ t^2 = 1,\ tst^{-1} = s^{-1+2^{n-1}} \rangle\ n \geqq 3$.

$G_0(Q\pi_1) \otimes G_0(Q\pi_2) \xrightarrow{\sim} G_0(Q[\pi_1 \times \pi_2])$ となるのは

① π_1 が type I で $n=0$ 又は II で $n=1$, IV で $n=2$ で π_2 が任意の type の時,

② π_1 が type (I, $n=1$), (II, $n=2$), (III, $n=2$), (V, $n=3$) 又は (VI, $n=3$) で, π_2 が type IV の時,

③ π_1 が type (I, $n=1$), (III, $n=2$), 又は (V, $n=3$) で, π_2 が type VI の時だけである。

文献

[1] C. W. Curtis and I. Reiner : Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, Interscience, 1962.

[2] . B. Fein ; Representations of direct products of finite groups, Pacific. J. Math., 20. (1967)
[3]. W. Feit ; Characters of Finite Groups , Benjamin 1967.
[4] W. Feit and J. G. Thompson ; Solvability of groups of odd order, Pacific. J. Math., 13 (1963)
[5] L. Solomon ; The representation of finite groups in algebraic number fields, J. Math, Soc. Japan 13. (1961).
[6] M. Hikari ; 準備中